Applications - Chapitre 6

Contraintes, puissance, travail et énergie cinétique

A.6.1 Métronome vertical

A.6.2 Décrochement d’un rail circulaire

A.6.3 Pendule conique

- On considère un métronome vertical constitué d'une masse m attachée à deux ressorts de constante élastique k chacun.

- La masse coulisse sans frottement sur un demi-cercle de rayon R. Le métronome est au repos lorsque l'angle ϕ est nul.

- Forces extérieures (plan vertical) :

  1. Poids :

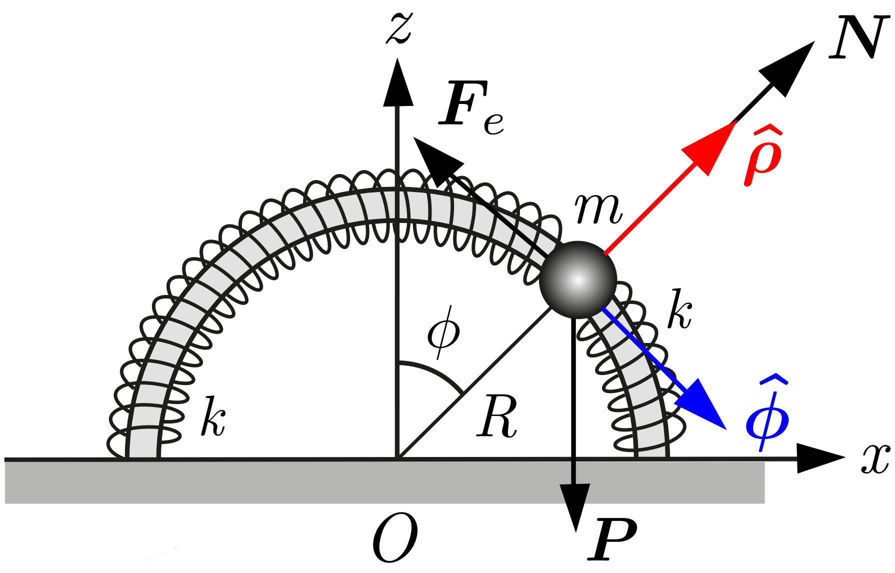
$$\boldsymbol{P} = mg\left(-\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{A.6.1}$$

  2. Réaction normale :

$$\boldsymbol{N} = N\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{A.6.2}$$

  3. Forces élastiques :

$$\boldsymbol{F}_e = -\,2\,k\,R\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{A.6.3}$$

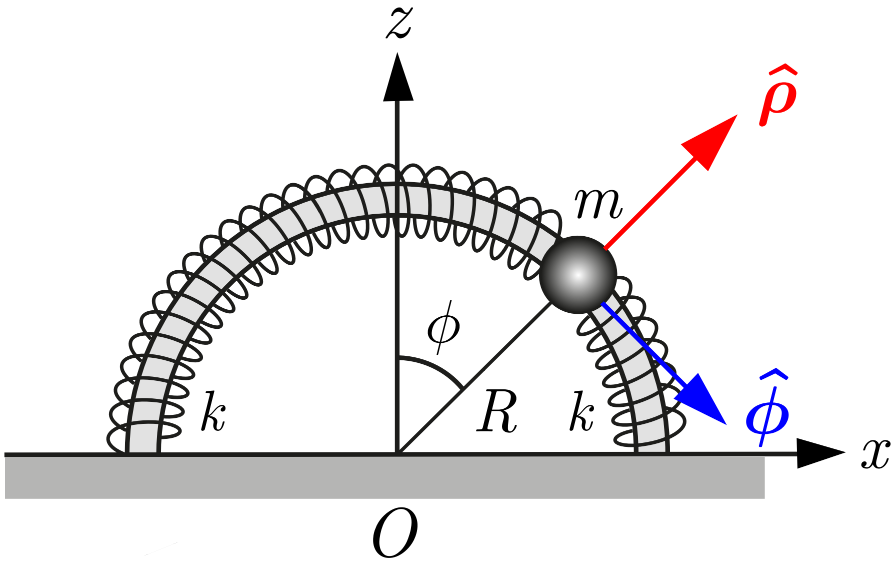


A.6.1 Métronome vertical

- Contrainte :

$$\rho = R = \text{cste} \qquad (A.6.4)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\rho} = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\rho} = 0$$



- Accélération : (coord. polaires)

$$\boldsymbol{a} = -R\,\dot{\phi}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + R\,\ddot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (A.6.5)$$

- Loi du mouvement (masse) :

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_e = m\,\boldsymbol{a} \qquad (A.6.6)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\rho}} : \quad -mg\cos\phi + N = -m\,R\,\dot{\phi}^2 \qquad (A.6.7)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad mg\sin\phi - 2\,k\,R\,\phi = m\,R\,\ddot{\phi} \qquad (A.6.8)$$

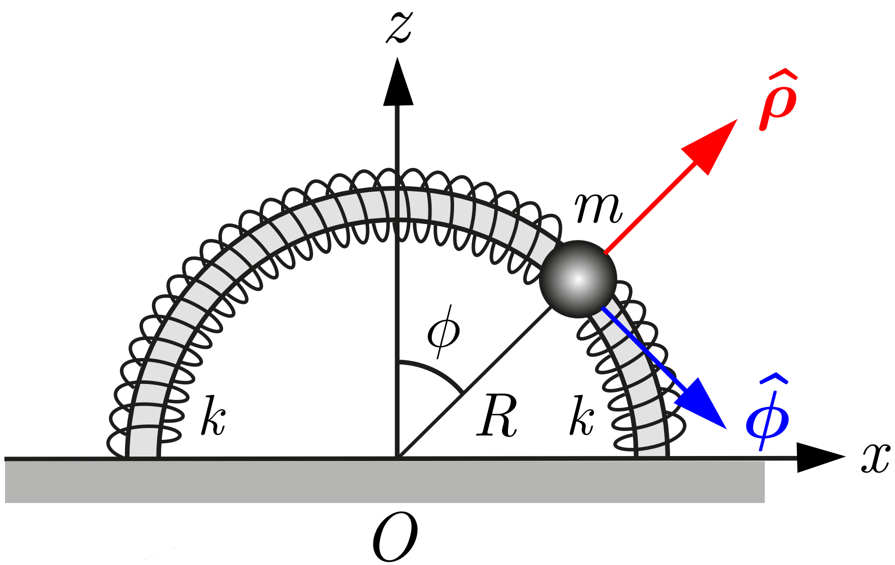
- Position d'équilibre :

$$\phi \equiv \phi_0 = \text{cste} \qquad (A.6.9)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\phi}_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\phi}_0 = 0$$

$$\xRightarrow{(A.6.8)} \quad mg\sin\phi_0 - 2\,k\,R\,\phi_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \phi_0 = 0 \qquad (A.6.10)$$



- Petites oscillations autour de la position d'équilibre (i.e. $\phi \ll 1$) :

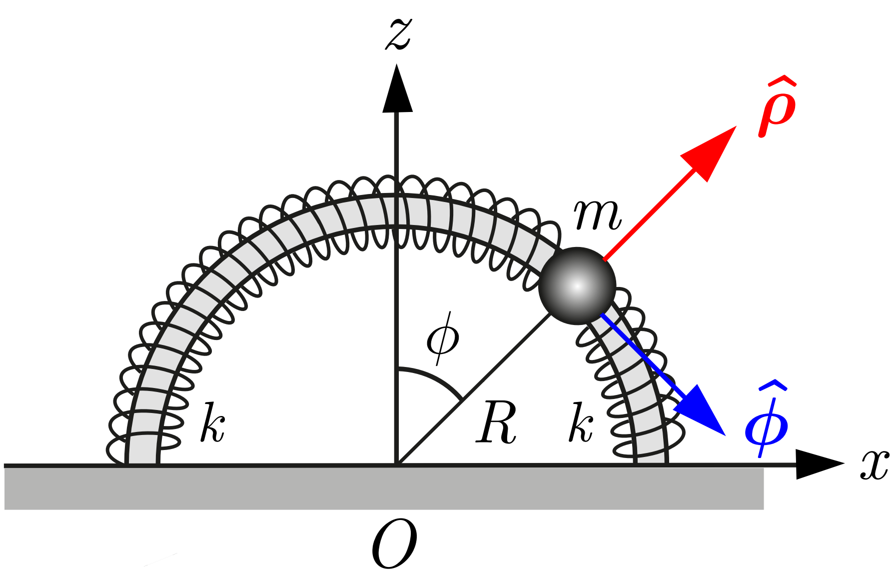
$$\sin\phi \simeq \phi \qquad (A.6.11)$$

- L'équation du mouvement tangentiel $(A.6.8)$ se réduit à :

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{2\,k}{m} - \frac{g}{R}\right)\phi = 0 \qquad (A.6.12)$$

- Equation du mouvement tangentiel :

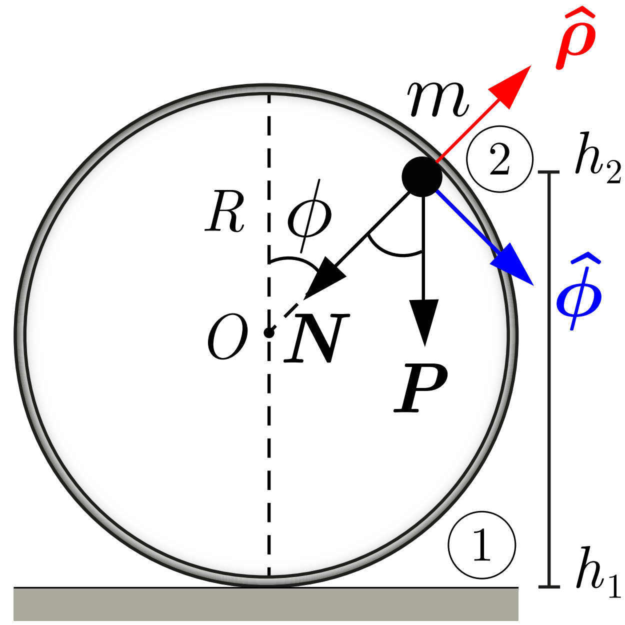
$$\ddot{\phi} + \left(\frac{2\,k}{m} - \frac{g}{R}\right)\phi = 0 \qquad (A.6.12)$$



1. Si $2\,R\,k > mg \quad\Rightarrow\quad$ petites oscillations : $\quad \omega^2 = \dfrac{2\,k}{m} - \dfrac{g}{R} > 0$
2. Si $2\,R\,k = mg \quad\Rightarrow\quad$ équilibre : $\quad \ddot{\phi} = \ddot{\phi}_0 = 0$
3. Si $2\,R\,k < mg \quad\Rightarrow\quad$ masse m chute

- On cherche à déterminer l'angle de décrochement ϕ_0 du point matériel de masse m en fonction de sa vitesse v_1 en position 1 au bas du rail.

- On utilise la loi vectorielle du mouvement, le théorème de l'énergie cinétique et la condition de décrochement.



- Forces extérieures (plan vertical) :

1. Poids :

$$\boldsymbol{P} = mg\left(-\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{A.6.13}$$

2. Réaction normale :

$$\boldsymbol{N} = -N\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{A.6.14}$$

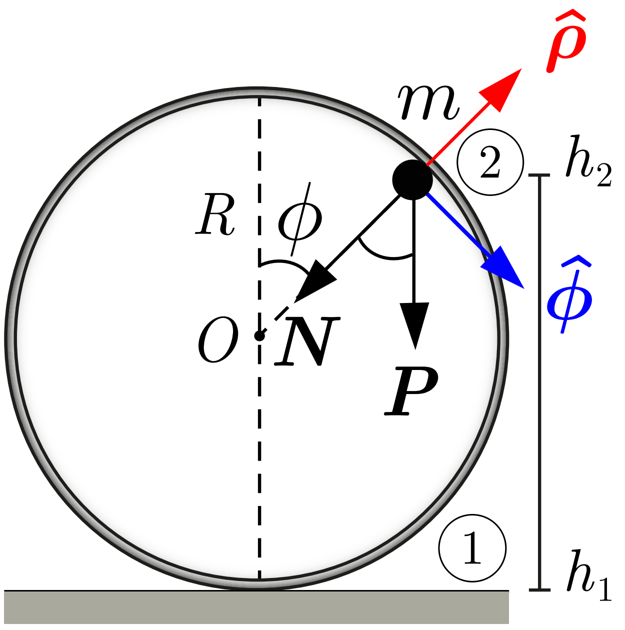
- Contrainte :

$$\rho = R = \text{cste} \qquad (A.6.15)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\rho} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\rho} = 0$$

- Accélération : (coord. polaires)

$$\boldsymbol{a} = -R\,\dot{\phi}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + R\,\ddot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (A.6.16)$$



- Loi du mouvement (masse) :

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} = m\,\boldsymbol{a} \qquad (A.6.17)$$

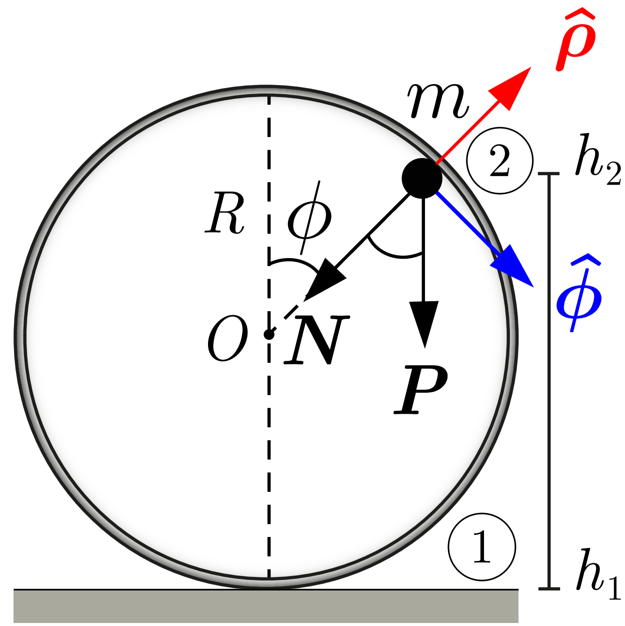
$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\rho}} : \quad -mg\cos\phi - N = -m\,R\,\dot{\phi}^2 \qquad (A.6.18)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad mg\sin\phi = m\,R\,\ddot{\phi} \qquad (A.6.19)$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2}_{=\,\Delta T_{1\to 2}} = \underbrace{-\,m\,g\,(h_2 - \,h_1)}_{=\,W_{1\to 2}(\boldsymbol{P})}$$

$$= -\,mgR\,(1 + \cos\phi) \qquad (A.6.20)$$



- Condition de décrochement :

$$N = 0 \qquad (A.6.21)$$

- Angle de décrochement 0 : $\phi \equiv \phi_0$ où $0 \leqslant \phi_0 \leqslant \pi/2$ $(A.6.22)$

$$(A.6.18) \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}_0^2 = \frac{g}{R}\,\cos\phi_0 \qquad (A.6.23)$$

$$(A.6.20) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{v_0^2}_{=\,R^2\,\dot{\phi}_0^2} - v_1^2 = -\,2\,gR\,(1 + \cos\phi_0) \qquad (A.6.24)$$

- $(A.6.23) \quad \Rightarrow \quad (A.6.24)$:

$$gR\cos\phi_0 - v_1^2 = -\,2\,gR\,(1+\cos\phi_0)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi_0 = \frac{v_1^2 - 2\,gR}{3\,gR} \qquad (A.6.25)$$

- Décrochement (haut et droite) :

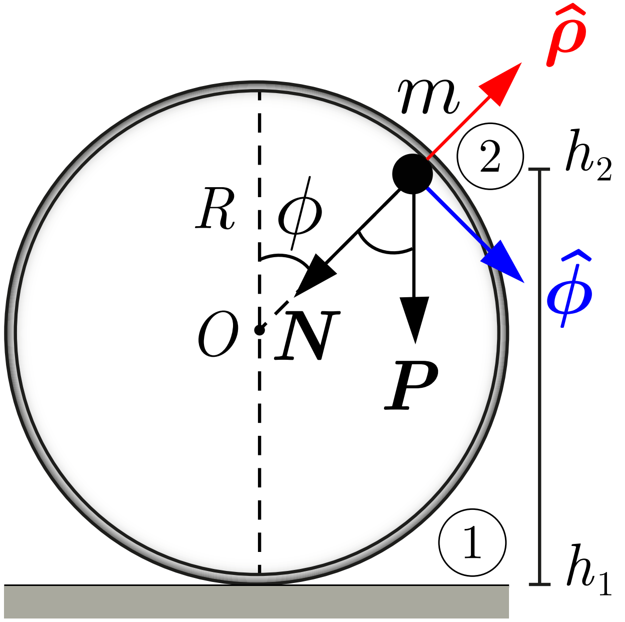
$$0 \leqslant \phi_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \cos\phi_0 \leqslant 1 \qquad (A.6.26)$$

- $(A.6.25) \quad \Rightarrow \quad (A.6.26)$:

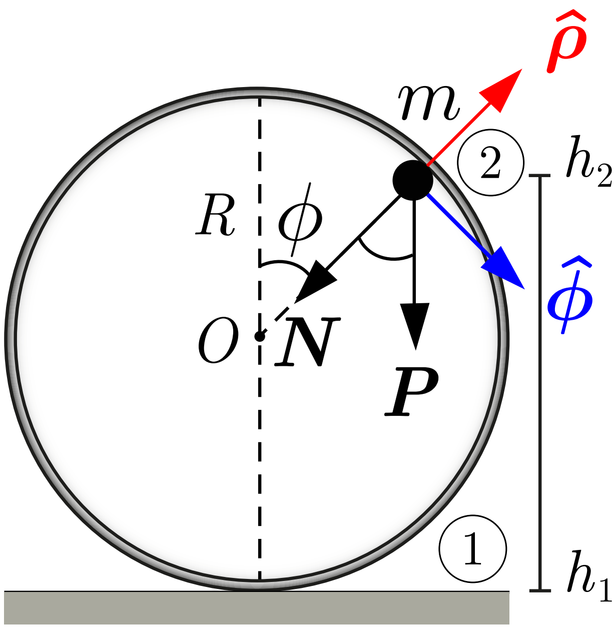
$$0 \leqslant \frac{v_1^2 - 2\,gR}{3\,gR} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\,gR \leqslant v_1^2 \leqslant 5\,gR \qquad (A.6.27)$$



- Inégalité de décrochement :

$$2\,gR \leqslant v_1^2 \leqslant 5\,gR \qquad (A.6.27)$$

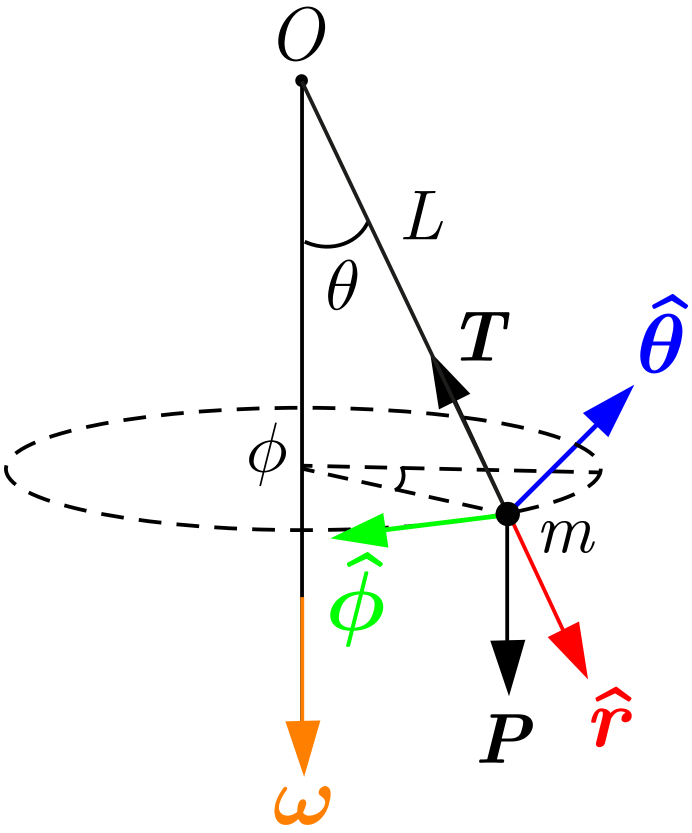


1. Si $v_1 < \sqrt{2\,gR} \Rightarrow$ pas de décrochement (bas)
2. Si $\sqrt{2\,gR} \leqslant v_1 \leqslant \sqrt{5\,gR} \Rightarrow$ décrochement (haut)
3. Si $v_1 > \sqrt{5\,gR} \Rightarrow$ pas de décrochement (haut)

EPFL

A.6.3 Pendule conique

- On considère un pendule conique constitué d'un point matériel de masse m attaché à un fil de longueur L et de masse négligeable fixé au point O. Le fil est en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{cste}$ autour d'un axe vertical dans le sens des aiguilles d'une montre.



- Soit θ l'angle entre le fil et l'axe vertical et ϕ l'angle qui repère la trajectoire du point matériel dans le plan horizontal.

- Forces extérieures (plan vertical) :

  1. Poids :

$$\boldsymbol{P} = mg\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \qquad (A.6.28)$$

  2. Tension :

$$\boldsymbol{T} = -T\,\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (A.6.29)$$

- Contraintes :

1. $r = L = \text{cste}$ (A.6.30)

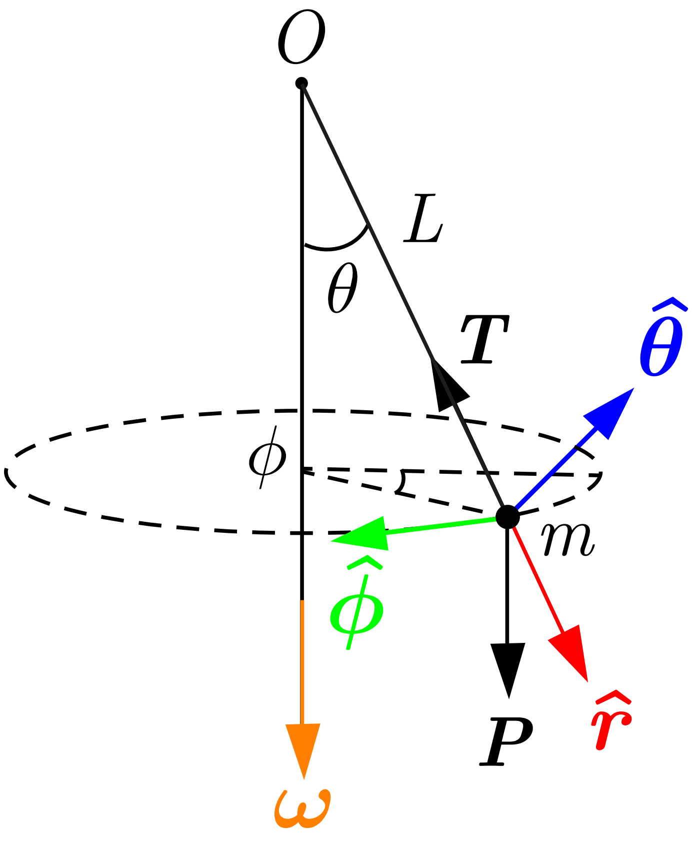
$\Rightarrow \quad \dot{r} = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{r} = 0$

2. $\dot{\phi} = \omega = \text{cste}$ (A.6.31)

$\Rightarrow \quad \ddot{\phi} = 0$

- Accélération : (coordonnées sphériques)

$$\boldsymbol{a} = -L\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}} + L\left(\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + 2L\omega\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (A.6.32)$$



- Loi du mouvement (masse) :

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} = m\,\boldsymbol{a} \tag{A.6.33}$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{r}} \ : \quad mg\cos\theta - T = -\,m\,L\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right) \tag{A.6.34}$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} \ : \quad -\,mg\sin\theta = m\,L\left(\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta\right) \tag{A.6.35}$$

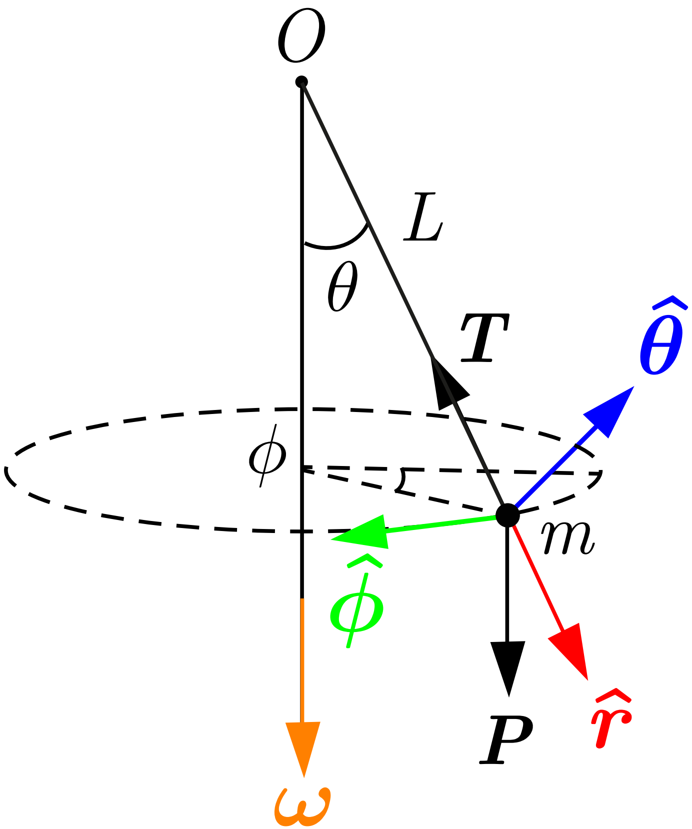
$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} \ : \quad 0 = 2\,m\,L\,\omega\,\dot{\theta}\cos\theta \tag{A.6.36}$$

- Angle de nutation :

$$(A.6.36) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{cste} \tag{A.6.37}$$

- Tension :

$$(A.6.34) \quad \text{et} \quad (A.6.37) \quad \Rightarrow \quad T = m\left(g\cos\theta + L\,\omega^2\sin^2\theta\right) \tag{A.6.38}$$



- Equation du mouvement :

$$(A.6.37) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0 \quad \xRightarrow{(A.6.35)}$$

$$\sin\theta\left(L\,\omega^2\cos\theta - g\right) = 0 \qquad (A.6.39)$$

- On trouve les deux solutions en annulant les facteurs du membre de gauche de l'équation du mouvement $(A.6.39)$.

1. $\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$
2. $\cos\theta = \dfrac{g}{L\,\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\dfrac{g}{L\,\omega^2}\right)$

   ssi $\quad \dfrac{g}{L\,\omega^2} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \geqslant \dfrac{g}{L}$